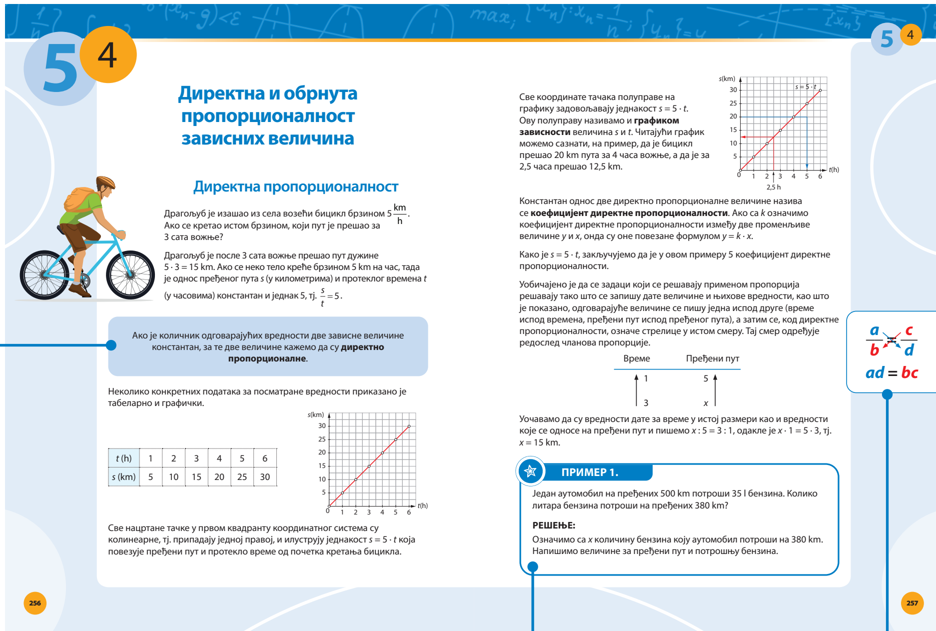
Оливера Тодоровић

МАТЕМАТИКА

6

Уџбеник са збирком задатака
за шести разред основне школе

ВУЛКАН
ЗНАЊЕ



Директна и обрнута пропорционалност зависних величина

Директна пропорционалност

Драгољуб је изашао из села возећи бицикл брзином $5\,\frac{km}{h}$. Ако се кретао истом брзином, који пут је прешао за 3 сата вожње?

Драгољуб је после 3 сата вожње прешао пут дужине $5 \cdot 3 = 15$ km. Ако се неко тело креће брзином 5 km на час, тада је однос пређеног пута s (у километрима) и протеклог времена t (у часовима) константан и једнак 5, тј. $\frac{s}{t} = 5$.

Ако је количник одговарајућих вредности две зависне величине константан, за те две величине кажемо да су **директно пропорционалне**.

Неколико конкретних података за посматране вредности приказано је табеларно и графички.

t (h)	1	2	3	4	5	6
s (km)	5	10	15	20	25	30

Све нацртане тачке у првом квадранту координатног система су колинеарне, тј. припадају једној правој, и илуструју једнакост $s = 5 \cdot t$ која повезује пређени пут и протекло време од почетка кретања бицикла.

Све координате тачака полуправе на графику задовољавају једнакост $s = 5 \cdot t$. Ову полуправу називамо и **графиком зависности** величина s и t. Читајући график можемо сазнати, на пример, да је бицикл прешао 20 km пута за 4 часа вожње, а да је за 2,5 часа прешао 12,5 km.

Константан однос две директно пропорционалне величине назива се **коефицијент директне пропорционалности**. Ако са k означимо коефицијент директне пропорционалности између две променљиве величине y и x, онда су оне повезане формулом $y = k \cdot x$.

Како је $s = 5 \cdot t$, закључујемо да је у овом примеру 5 коефицијент директне пропорционалности.

Уобичајено је да се задаци који се решавају применом пропорција решавају тако што се записују дате величине и њихове вредности, као што је показано, одговарајуће величине се пишу једна испод друге (време испод времена, пређени пут испод пређеног пута), а затим се, код директне пропорционалности, означе стрелице у истом смеру. Тај смер одређује редослед чланова пропорције.

Време	Пређени пут
1	5
3	x

Уочавамо да су вредности дате за време у истој размери као и вредности које се односе на пређени пут и пишемо $x : 5 = 3 : 1$, одакле је $x \cdot 1 = 5 \cdot 3$, тј. $x = 15$ km.

ПРИМЕР 1.

Један аутомобил на пређених 500 km потроши 35 l бензина. Колико литара бензина потроши на пређених 380 km?

РЕШЕЊЕ:

Означимо са x количину бензина коју аутомобил потроши на 380 km. Напишимо величине за пређени пут и потрошњу бензина.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

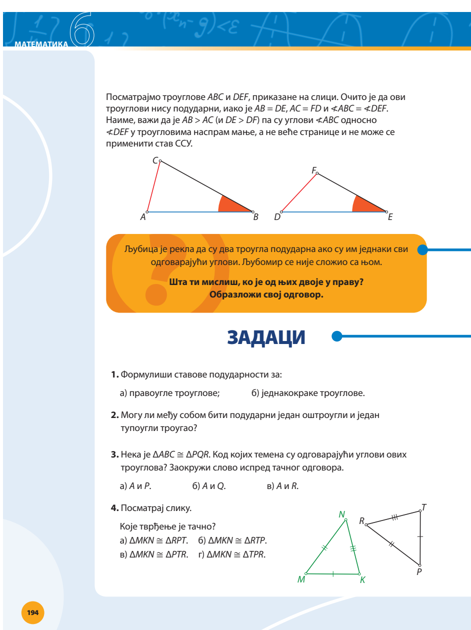
$ad = bc$

256 257

Најважније дефиниције које ученици треба да запамте

Урађени примери

Подсетници за ученике



МАТЕМАТИКА

Посматрајмо троуглове ABC и DEF, приказане на слици. Очито је да ови троуглови нису подударни, иако је $AB = DE$, $AC = FD$ и $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$. Наиме, важи да је $AB > AC$ (и $DE > DF$) па су углови $\sphericalangle ABC$ односно $\sphericalangle DEF$ у троугловима наспрам мање, а не веће странице и не може се применити став ССУ.

Љубица је рекла да су два троугла подударна ако су им једнаки сви одговарајући углови. Љубомир се није сложио са њом.

Шта ти мислиш, ко је од њих двоје у праву? Образложи свој одговор.

ЗАДАЦИ

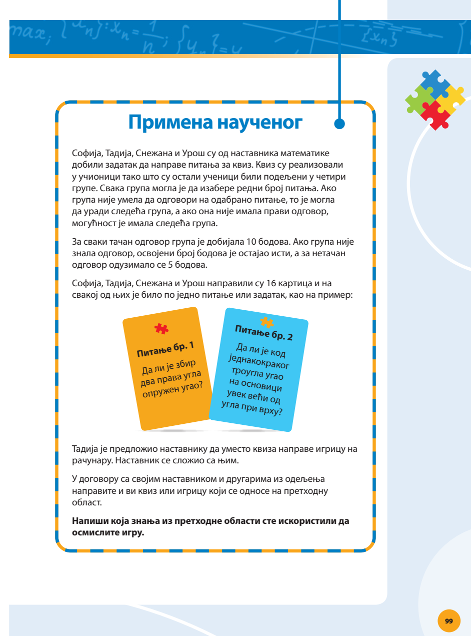
1. Формулиши ставове подударности за:
   а) правоугле троуглове; б) једнакокраке троуглове.
2. Могу ли међу собом бити подударни један оштроугли и један тупоугли троугао?
3. Нека је $\triangle ABC \cong \triangle PQR$. Код којих темена су одговарајући углови ових троуглова? Заокружи слово испред тачног одговора.
   а) A и P. б) A и Q. в) A и R.
4. Посматрај слику.
   Које тврђење је тачно?
   а) $\triangle MKN \cong \triangle RPT$. б) $\triangle MKN \cong \triangle RTP$.
   в) $\triangle MKN \cong \triangle PTR$. г) $\triangle MKN \cong \triangle TPR$.

194

Питање за тимски рад

Задаци за самосталан рад

Примена наученог кроз решавање реалних животних ситуација



Примена наученог

Софија, Тадија, Снежана и Урош су од наставника математике добили задатак да направе питања за квиз. Квиз су реализовали у учионици тако што су остали ученици били подељени у четири групе. Свака група могла је да изабере редни број питања. Ако група није умела да одговори на одабрано питање, то је могла да уради следећа група, а ако она није имала прави одговор, могућност је имала следећа група.

За сваки тачан одговор група је добијала 10 бодова. Ако група није знала одговор, освојени број бодова је остајао исти, а за нетачан одговор одузимало се 5 бодова.

Софија, Тадија, Снежана и Урош направили су 16 картица и на свакој од њих је било по једно питање или задатак, као на пример:

Питање бр. 1
Да ли је збир два права угла опружен угао?

Питање бр. 2
Да ли је код једнакокраког троугла угао на основици увек већи од угла при врху?

Тадија је предложио наставнику да уместо квиза направе игрицу на рачунару. Наставник се сложио са њим.

У договору са својим наставником и другарима из одељења направите и ви квиз или игрицу који се односе на претходну област.

Напиши која знања из претходне области сте искористили да осмислите игру.

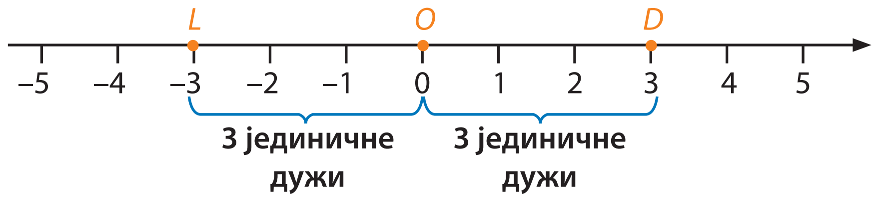
99

1 3

Супротан број. Апсолутна вредност целог броја

Супротан број

Једног дана највиша дневна температура у Вршцу била је +3 °C, а најнижа ноћна –3 °C.



Приметимо да су тачке *L* и *D* подједнако удаљене од тачке *O*.

Два броја која се разликују само у знаку називају се **супротни бројеви**. Дакле бројеви –3 и +3 су супротни бројеви. Број 3 је супротан броју –3 и стога је број –3 супротан броју 3, а не било ком другом броју. Број не може имати два супротна броја. Сваки цео број има тачно један супротан број.

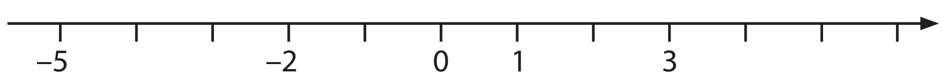
На бројевној правој паровима супротних целих бројева одговарају тачке које су централносиметричне у односу на тачку чија је координата 0.

Ако је број позитиван, онда ће његов супротни број бити са знаком минус; ако је број са знаком минус, њему супротан ће увек бити онај са знаком плус.

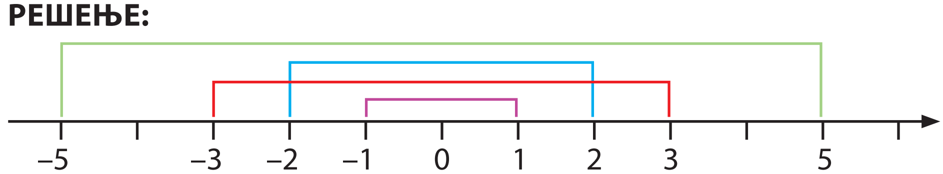
Супротан број целог броја *n* означава се са –*n*. Приметимо да је 0 једини број који је сам себи супротан.

ПРИМЕР 1.

На датој бројевној правој обележи тачке чије су координате бројеви супротни бројевима 1, 3, 5, –2 и –5.



РЕШЕЊЕ:



Тачка централносиметрична тачки којој одговара број 1 је тачка са координатом –1. Дакле, супротан број броју +1 је број –1. Слично добијамо да је супротан број броју 3 број –3, а броју –2 број 2.

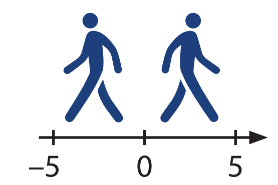
Тачке којима одговарају бројеви –5 и 5 са супротних су страна координатног почетка и на једнаком растојању од њега. Зато закључујемо да је броју 5 супротан број –5, а броју –5 је супротан број 5. Дакле:

$$-(-5) = 5.$$

Израз $-(-n)= n$ можемо читати као „супротан број броја $-n$ је n" или „минус минус n једнако је n".

$-(+5) = -5$

$-(-5) = +5$



ПРИМЕР 2.

За сваки појам напиши одговарајући израз:

а) супротан број броја 10;

б) супротан број броја –8;

в) супротан број супротног броја броја –4.

РЕШЕЊЕ:

а) Супротан број броја 10 записујемо $-(+10)$ и добијамо да је то број -10.

б) Супротан број броја –8 записујемо $-(-8)$ и добијамо да је то број 8.

в) Супротан број броја –4 записујемо $-(-4)$, а његов супротан број је $-(-(-4))$. Како је супротан број броја –4 број 4, то је њему супротан број –4, па је $-(-(-4))= -4$.

Као што често уместо +1 пишемо 1, јер се знак + испред броја може изоставити, тако и уместо $+(-1)$ пишемо само -1, или уместо $-(+1)$ пишемо -1.

ПРИМЕР 3.

У празан квадрат упиши одговарајући знак.

а) $+(-18) = \square 18$; б) $-(-18) = \square 18$; в) $-(+18) = \square 18$; г) $+(+18) = \square 18$

РЕШЕЊЕ:

а) Знак + изоставимо и добијамо $+(-18) = -18$.

б) Како је супротан број броју –18 број +18, то је $-(-18) = +18$.

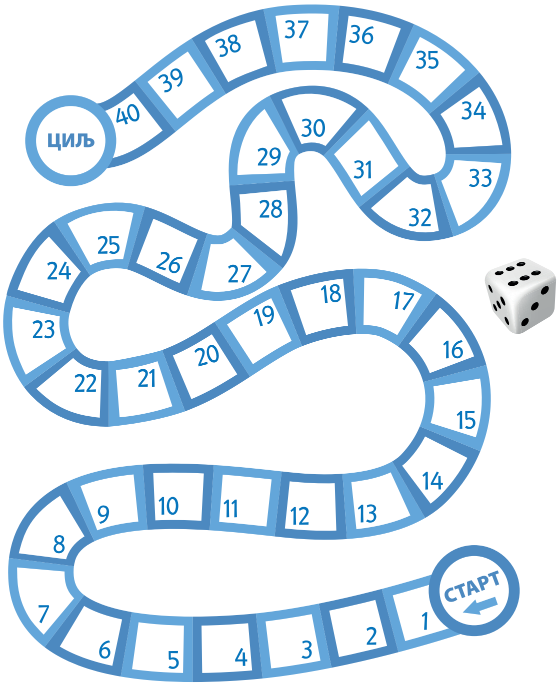
в) Како је супротан број броју +18 број –18, то је $-(+18) = -18$.

г) Знак + изоставимо и добијамо $+(+18) = +18$.

Примена наученог

Петра је на интернету пронашла игрицу *Целобројне авантуре* и одлучила је да са својим другарима направи игрицу сличну овој.

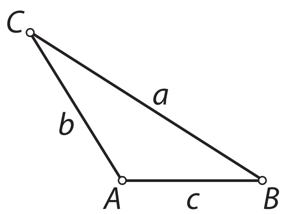
Заједно су направили стазу сличну стази на слици. Сваком пољу су доделили одговарајући број, а за сваки број су направили одговарајућу картицу. На картицама су написали различите захтеве, као на пример: *прескочи (6 – 1) поља* или *–3 : 1* итд. Увели су правила: ако је вредност израза позитивна, кретање је унапред; ако је негативна, крећу се уназад; ако је нула – нема померања. Прво поље су означили са *Старт*, а последње са *Циљ*.



Направили су и коцку од картона, као и фигуре за игру. Када играч баци коцку, помери своју фигуру унапред за одговарајући број поља. Затим узима одговарајућу картицу и израчунава вредност израза. У зависности од добијеног резултата, помера се унапред или уназад.

Осмисли и ти са својим другарицама и друговима игру сличну овој коју су направили Петра и њени другари.

Напиши која знања из претходне области су ти помогла да решиш ове животне ситуације.



$c < b < a$

$\sphericalangle C < \sphericalangle B < \sphericalangle A$

Љубица је рекла да је у сваком тупоуглом троуглу највећа страница наспрам тупог угла. Љубомир се није сложио са њом.

Шта ти мислиш, ко је од њих двоје у праву? Образложи свој одговор.

ЗАДАЦИ

1. Дати су углови једног троугла: а) $\alpha = 42°$, $\beta = 58°$, $\gamma = 80°$; б) $\alpha = 37°$, $\beta = 102°$, $\gamma = 41°$; в) $\alpha = 99°$, $\beta = 11°$, $\gamma = 70°$. Упореди странице овог троугла.

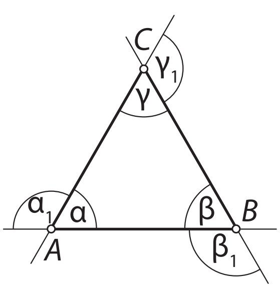
2. Дати су углови једног троугла: а) $\alpha = 26°$, $\beta = 72°$; б) $\alpha = 73°$, $\gamma = 18°$.

Одреди трећи угао тог троугла и упореди његове странице.

3. Два спољашња угла троугла су:

а) $\alpha_1 = 113°$, $\beta_1 = 94°$; б) $\alpha_1 = 82°30'$, $\gamma_1 = 114°30'$.

Одреди све унутрашње углове тог троугла и упореди његове странице.



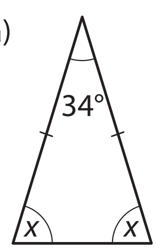
$\alpha_1 + \alpha = 180°$

$\beta_1 + \beta = 180°$

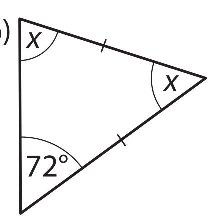
$\gamma_1 + \gamma = 180°$

4. На слици су приказани једнакокраки троуглови. На основу података са слике израчунај непознате углове.

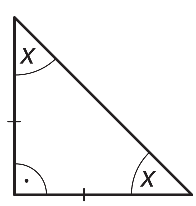
а)



б)



в)



5. Колики су углови једнакокраког правоуглог троугла?

6. Угао при врху једкокраког троугла је 80°.

а) Израчунај углове на основици. б) Да ли је основица дужа од крака?

7. Угао на основици једнакокраког троугла је 70°.

а) Израчунај угао при врху. б) Да ли је основица дужа од крака?

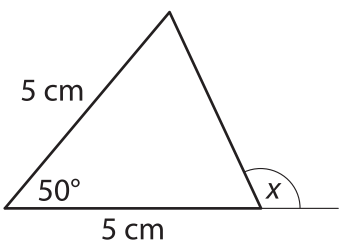
8. Одреди угао при врху једнакокраког троугла ако је унутрашњи угао на основици:

а) 40°; б) 38°; в) 63°; г) 52°30'.

9. Одреди угао на основици једнакокраког троугла ако је угао при врху:

а) 30°; б) 42°; в) 53°; г) 55°30'.

10. На основу података са слике одреди угао *x*.



11. Дат је један оштар угао правоуглог троугла: а) $\alpha = 33°$; б) $\beta = 41°$.

Израчунај други оштар угао и упореди катете.

12. Један спољашњи угао правоуглог троугла је $\beta_1 = 137°$. Израчунај унутрашње углове и упореди катете.

13. Дате су странице троугла:

а) $a = 5$ cm, $b = 6$ cm и $c = 9$ cm; б) $a = 4$ cm, $b = 8$ cm и $c = 7$ cm;
в) $a = 5$ cm, $b = 5$ cm и $c = 9$ cm; г) $a = 3$ cm, $b = 3$ cm и $c = 3$ cm.
Упореди одговарајуће углове тог троугла.

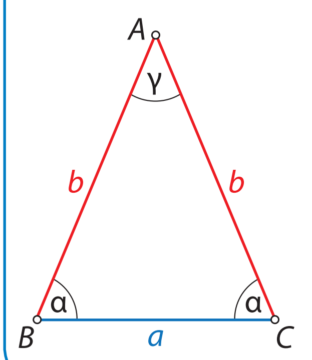
14. Обим једног троугла је $O = 40$ cm, а две странице су $a = 16$ cm, $b = 13$ cm. Одреди трећу страницу и упореди углове тог троугла.

15. Збир два унутрашња угла троугла је $\alpha + \beta = 83°$. Одреди угао γ. Која је најдужа страница тог троугла?

16. Збир два спољашња угла троугла $\alpha_1 + \beta_1 = 288°$. Одреди угао γ. Која је најдужа страница троугла?

17. Један оштар угао правоуглог троугла је 30°. Докажи да је катета наспрам тог угла једнака половини хипотенузе.

Једнакокраки троугао



5.2 Зависне величине и њихово графичко представљање

СЛАТКЕ ПОГАЧИЦЕ

(20 комада)

2 јајета

500 g брашна

150 g путера

20 g квасца

$\frac{1}{2}$ шоље млека

прстохват соли

1 кашичица шећера

Милица има рецепт за 20 погачица, а жели да направи само 10 погачица.

Да би направила одговарајућу количину теста, мора да смањи количине састојака и да уместо 2 јајета узме једно, а уместо 500 g брашна 250 g. Путера ће јој бити потребно 125 g, квасца 10 g, млека $\frac{1}{4}$ шоље и $\frac{1}{2}$ кашичице шећера.

Приметимо да се при промени броја погачица мења количина састојака, тј. да маса састојака зависи од броја погачица које треба направити.

За две величине такве да се при промени једне величине мења и она друга кажемо да су **зависне**. На пример, када се промени дужина странице квадрата, мења се и његов обим, а када се повећа географска ширина, смањује се температура ваздуха итд.

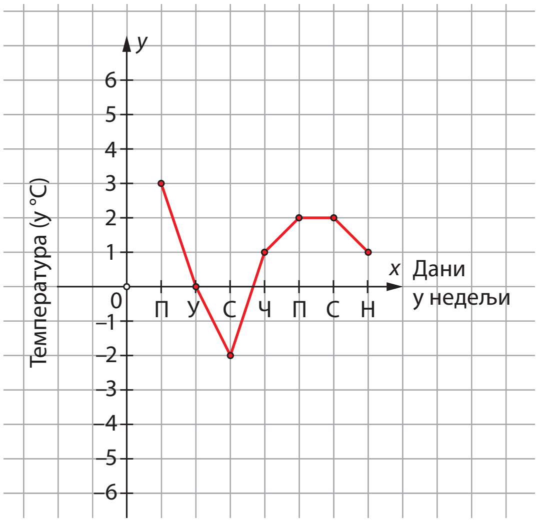
Милан је седам дана зимског распуста провео код баке у Ивањици. У следећој табели приказане су просечне температуре које је објавио Републички хидрометеоролошки завод за тих седам дана у Ивањици.

Дан	Понедељак	Уторак	Среда	Четвртак	Петак	Субота	Недеља
Температура	+3 °C	0 °C	−2 °C	+1 °C	+2 °C	+2 °C	+1 °C

Прикажимо ове податке графички. Нацртајмо координатни систем и нека прва координата представља дане, а друга координата температуру. Уцртајмо у датом координатном систему тачке одређене паровима (*x*-дани и *y*-температура). Скуп свих добијених тачака у равни назива се **график зависности величине *y* у односу на величину *x***.

Приметимо да смо у овом случају изоставили део осе *x* због боље прегледности.

Овај графички приказ просечне температуре у Ивањици за седам дана је веома илустративан. Можемо прочитати ког је дана била која температура, такође можемо видети када је био пораст температуре, када се температура смањивала или када није било промене температуре, као на пример у петак и суботу.



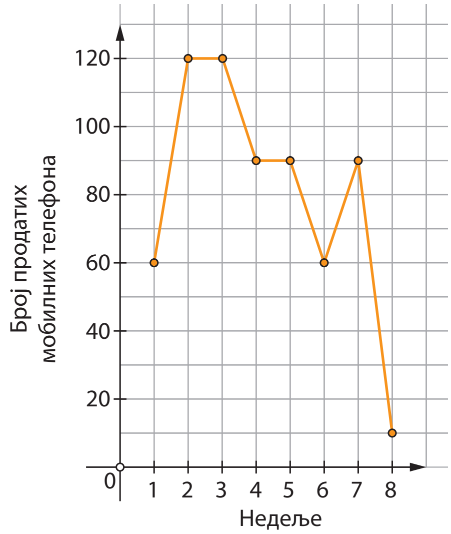
ПРИМЕР 1.

Када је после 8 недеља од отварања продавнице *Моби* послодавац затражио приказ продаје мобилних телефона у том периоду, добио је график као на слици.

а) Шта је представљено на x-оси, а шта на y-оси?

б) У којој недељи је продато највише, а у којој најмање мобилних телефона?

в) Колико је укупно мобилних телефона продато за тих 8 недеља?



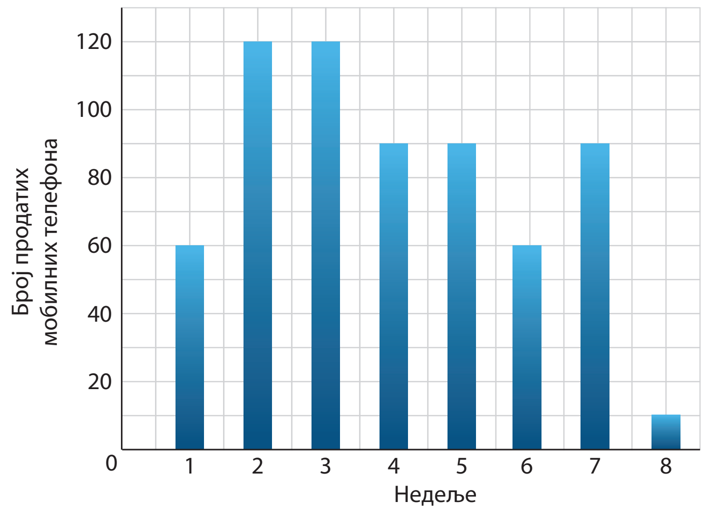
РЕШЕЊЕ:

а) Број недеље је представљен на x-оси, а број продатих мобилних телефона на y-оси.

б) У другој и трећој недељи је продато по 120 мобилних телефона, што је највећи број, а у осмој недељи је продато најмање, тј. само 10 мобилних телефона.

в) Укупан број продатих телефона је збир броја продатих телефона по недељама, тј. $60 + 120 + 120 + 90 + 90 + 60 + 90 + 10 = 640$.

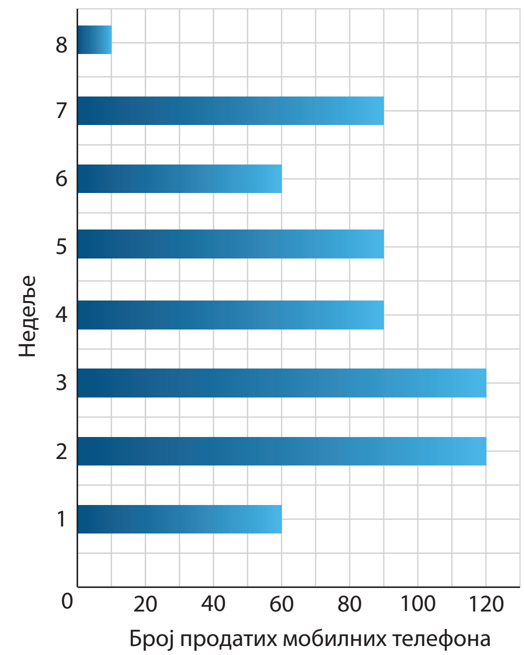
Приметимо да у овом случају јединичне дужи на осама нису једнаке, као и да су изостављени делови оса због прегледнијег приказивања података.



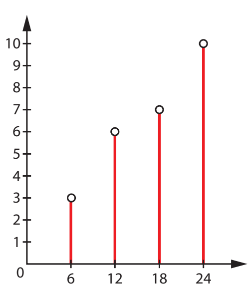
Ови подаци могу да се прикажу и **стубичастим дијаграмом**.

Приказ података стубичастим дијаграмом је веома сличан приказу података у координатном систему. Изнад сваке ознаке на *x*-оси (у овом случају броја недеље) цртају се правоугаоници (или само линије) тако да дужине његових вертикалних страница (линија) одговарају придруженим бројевним вредностима на *y*-оси (у овом случају броју продатих мобилних телефона). Овакав стубичасти дијаграм се назива вертикални стубичасти дијаграм.

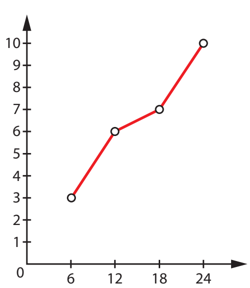
Међутим, подаци се могу приказати и **хоризонталним стубичастим дијаграмом**, тако што се на *x*-оси прикаже број продатих мобилних телефона, а на *y*-оси број недеље.



Дијаграм



График



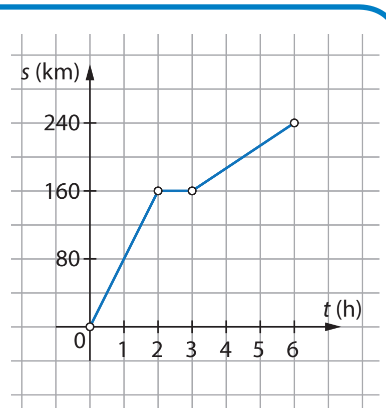
ПРИМЕР 2.

На графику је приказано кретање аутобуса.

а) Колико километара је прешао аутобус за прва два сата кретања?

б) Колико времена се кретао до прве станице?

в) Колико времена се аутобус задржао на станици?



г) Колико укупно времена се аутобус кретао?

д) Којом брзином се кретао аутобус пре, а којом после станице?

РЕШЕЊЕ:

Најпре приметимо да је на *x*-оси приказано време (*t*) изражено у часовима (*h*) и да јединична дуж представља 1 час, а на *y*-оси представљен је пређени пут (*s*) изражен у километрима (km), а јединична дуж представља 80 km. Такође уочавамо да график приказује период од 6 сати кретања аутобуса и да је за то време аутобус прешао укупно 240 km.

а) Квадратна мрежа нам помаже да прочитамо да је тачки на графику чија је координата на оси *t* једнака 2, одговарајућа координата на *s*-оси 160. Закључујемо да је аутобус за прва два сата кретања прешао 160 km.

б) На графику уочавамо да од 2 до 3 часа није било кретања, дакле после 2 сата вожње аутобус је стао.

в) Како од 2 до 3 сата није било кретања, то значи да је аутобус на станици провео $3 - 2 = 1$ сат.

г) Аутобус је провео у вожњи $6 - 1 = 5$ сати, јер је један сат стајао на станици.

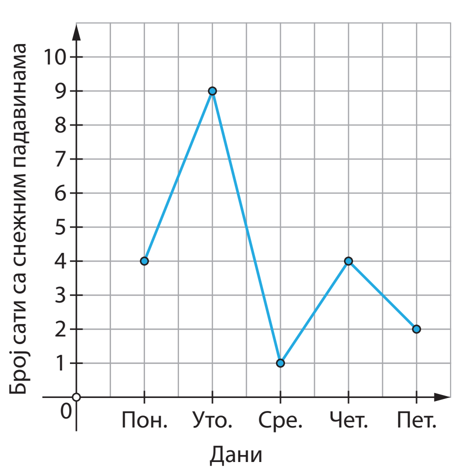
д) Читамо са графика да је аутобус за први сат прешао 80 km и исто толико за други сат вожње и закључујемо да се прва два сата кретао просечном брзином од 80 km на час. После паузе од сат времена аутобус се кретао $6 - 3 = 3$ часа и за то време је прешао $240 - 160 = 80$ km, што значи да се кретао просечном брзином од $\frac{80}{3}$ km на час.

ПРИМЕР 3.

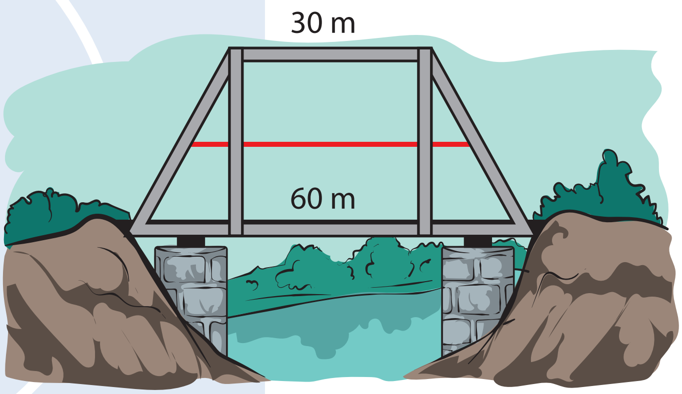
Снежана је пет дана зимског распуста провела код баке и деке у Бачкој Паланци. Сваког дана је падао снег. На слици је приказано колико сати дневно је падао снег за тих пет дана.

а) Колико сати је у уторак падао снег?

б) Којег дана је најмање сати падао снег?



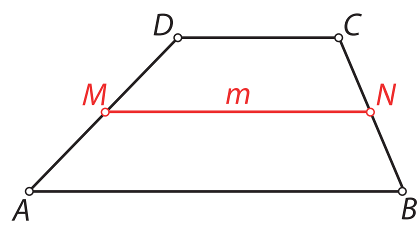
Средња линија и висина трапеза



Инжењер Јовановић је нацртао конструкцију моста која има облик трапеза. Црвеном линијом је означио гвоздену греду која треба да ојача конструкцију. Та греда спаја средишта кракова трапеза.

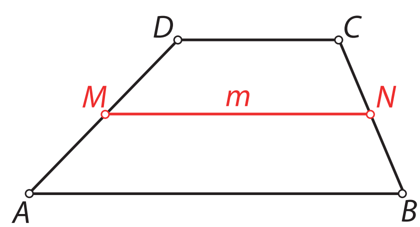
Дуж која спаја средишта кракова трапеза назива се **средња линија** (**средња дуж**) тог трапеза.

На слици је дуж *MN* средња линија трапеза *ABCD*. Најчешће се средња линија означава са *m*.



Применићемо позната својства вектора да бисмо показали да је средња линија трапеза паралелна са основицама и да је њена дужина једнака полузбиру дужина основица.

Очигледно је $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ и $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$.

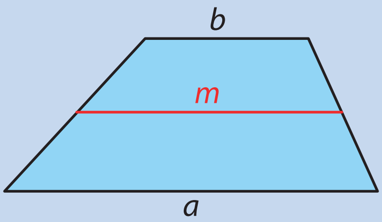


Сабирањем левих и десних страна ових једнакости добијамо $2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$.

Међутим, како је $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$, то је $2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$, тј. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$.

Вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ су истог правца, па је и њихов збир истог правца, а то значи да је вектор $\overrightarrow{MN}$ тог истог правца, тј. $MN \parallel AB \parallel CD$.

Ако је m средња линија, а a и b основице трапеза, тада важи $m = \frac{1}{2}(a + b)$, при чему је средња линија паралелна основицама.



ПРИМЕР 1.

а) Одреди средњу линију трапеза, ако су његове основице $a = 23$ cm и $b = 17{,}6$ cm.

б) Ако је једна основица трапеза $b = 14$ cm и средња линија $m = 20$ cm, одреди дужину друге основице a тог трапеза.

РЕШЕЊЕ:

а) Како је $m = \frac{1}{2}(a + b)$, то је $m = \frac{1}{2}(23 + 17{,}6) = 20{,}3$ cm.

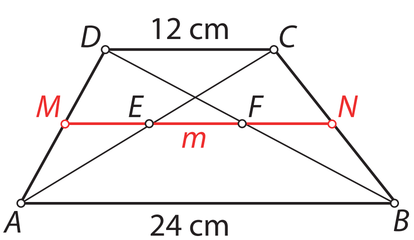
б) Из $20 = \frac{a+14}{2}$ налазимо $a + 14 = 40$, па је $a = 40 - 14 = 26$.
Дакле, $a = 26$ cm.

ПРИМЕР 2.

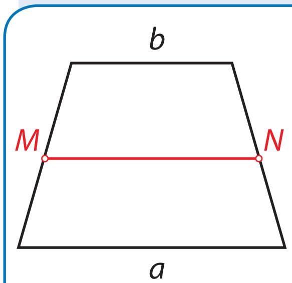
Докажи да дијагонале трапеза, чије су основице $a = 24$ cm и $b = 12$ cm, деле средњу линију тог трапеза на три једнака дела.

РЕШЕЊЕ:

Дуж ME је средња линија троугла ACD, па је $ME = \frac{1}{2} \cdot 12$ cm $= 6$ cm. Слично, дуж FN је средња линија троугла BCD, па је $FN = \frac{1}{2} \cdot 12$ cm $= 6$ cm.

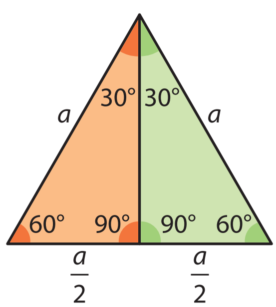


Како је MN средња линија трапеза, то је $MN = \frac{24+12}{2} = \frac{36}{2} = 18$ cm, па је дужина дужи $EF = 6$ cm, јер је $EF = MN - ME - FN = 18 - 6 - 6 = 6$ cm.

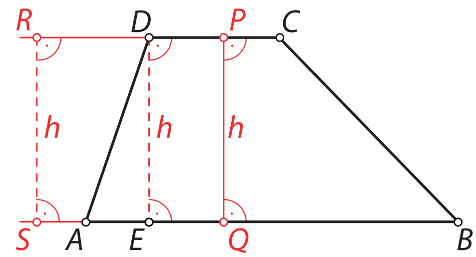


$MN \parallel a \parallel b$

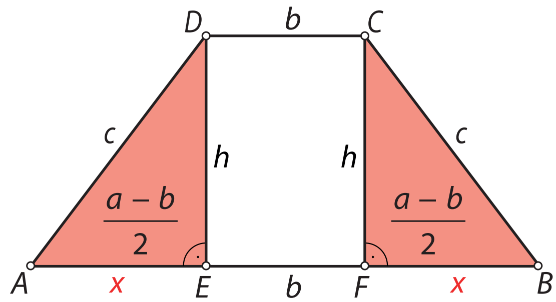
$MN = \frac{1}{2}(a + b)$



Дуж која спаја праве које садрже основице трапеза и која је нормална на те праве назива се **висина трапеза**. Као што је уобичајено, висину означавамо са h. Све дужи RS, DE, PQ на слици су висине трапеза $ABCD$. Очигледно је да су све висине једног трапеза међу собом једнаке.

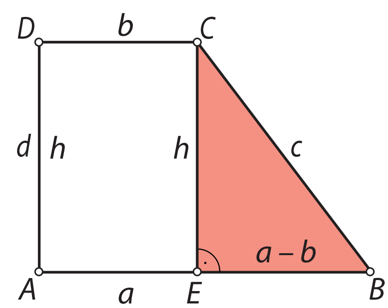


Нека је $ABCD$ једнакокраки трапез, DE и CF његове висине, а основице $AB = a$ и $CD = b$. Тада је четвороугао $EFCD$ правоугаоник, па је $EF = DC = b$. Троуглови AED и BFC су подударни ($AD = BC$, $DE = CF$, $\sphericalangle DAE = \sphericalangle CBF$) па је $b + x + x = a$, одакле је $2 \cdot x = a - b$, тј. $x = \frac{a-b}{2}$.



Висина правоуглог трапеза једнака је краћем краку тог трапеза.

Заиста, четвороугао $AECD$ је правоугаоник, па је $AD = EC$.



Љубица је рекла да је у сваком једнакокраком трапезу, у коме је угао који заклапају крак и дужа основица једнак 60°, висина једнака половини крака. Љубомир је тврдио да је крак једнак половини висине.

Шта ти мислиш, ко је од њих двоје у праву? Образложи свој одговор.